DM/Partiel

Afin de remplacer le partiel qui aurait du se tenir le 16 novembre, vous pourrez faire ce DM **facultatif.** Il est à déposer sur Moodle avant Dimanche 22 Novembre à 23h59. Il sera corrigé mais ne comptera pas dans l'évalutation du semestre.
Il est composé de deux problèmes totalement indépendants qui font appel à de nombreux outils développés pendant les cours et les TDs.

- Le problème 1 étudie la topologie faible sur ℓ^1.
- Le problème 2 traite de la compactification de Stone–Čech. L'énoncé est en anglais.

Les problèmes sont à rédiger sur **2 copies séparées** : il y aura deux boîtes aux lettres virtuelles sur Moodle pour les y déposer.

Vous pouvez rédiger en **anglais ou en français**. Nous attendons des rédactions claires, complètes et concises. Vous pourrez simplement scanner vos feuilles pour les déposer sur Moodle : assurez cependant que votre texte soit **lisible.** Une rédaction en LaTeX, bien que possible et plus lisible, n'est **pas** attendue de votre part. Chaque problème devra être dans un **UNIQUE fichier PDF**. (Il y a ce qu'il faut en ligne pour fusionner les PDF si nécessaire).

Problème 1 : Topologies sur ℓ^1

Dans ce problème, on va étudier deux topologies qui coexistent sur l^1 : la topologie forte (celle de la norme) et la topologie faible. On va notamment montrer que ces deux topologies sont effectivement distinctes mais possèdent exactement les mêmes suites convergentes.

Rappels et notations

- On note $\ell^1 := \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ , \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\}$, que l'ont munit de la norme
$$||u||_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$
ℓ^1 est un espace vectoriel normé complet.
- On note $\ell^\infty := \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ , \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\}$, que l'on munit de la norme
$$||u||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$
ℓ^∞ est un espace vectoriel normé complet.
- Si E est un espace vectoriel normé, on note E^* son dual topologique, à savoir l'espace des formes linéaires continues sur E. E^* est naturellement muni d'une norme
$$||f||_{E^*} = \sup_{x\in E, ||x||\leq 1} |f(x)|$$
- Pour $i \in \mathbb{N}$, on note e_i la suite $(\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$.

I - Quelques propriétes de la topologie de ℓ^1

1. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\{e_i, i \in \mathbb{N}\}\right)$ est dense dans ℓ^1. En déduire que ℓ^1 est séparable.
2. Si $v \in \ell^\infty$, on définit $\phi(v) : \ell^1 \to \mathbb{R}, u \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} u_i v_i$.
   (a) Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, $\phi(v) \in (\ell^1)^*$ et que $||\phi(v)||_{(\ell^1)^*} = ||v||_\infty$.
   (b) Montrer que $\phi : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ est un isomorphisme et une isométrie.

   On pourra donc identifier $(\ell^1)^*$ et ℓ^∞.
3. Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
   Indication : On pourra considérer l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$.

II - Topologie faible sur ℓ^1

Si $F \subset (\ell^1)^*$ est finie, $r > 0$ et $u \in \ell^1$, on note

$$B_F(u, r) \coloneqq \{v \in \ell^1 \ , \forall f \in F, |f(u - v)| < r\}$$

On définit également un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de ℓ^1 par la propriété

$$U \in \mathscr{T} \iff \forall x \in U, \exists F \subset (\ell^1)^* \text{ finie }, r > 0, B_F(x, r) \subset U \tag{1}$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur ℓ^1. On parle de la topologie faible.
2. Comparer $\mathscr{T}$ avec la topologie induite par la norme $|| \cdot ||_1$.
3. Soient $(x_n) \in \ell^1$ et $x \in \ell^1$. On notera $x_n \rightharpoonup x$ pour signifier que (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathscr{T}$, et on garde la notation $x_n \to x$ pour la convergence en norme $||\cdot||_1$. Montrer que $x_n \rightharpoonup x \iff \forall f \in (\ell^1)^*, f(x_n) \to f(x)$.
4. Dans cette question, on va calculer l'adhérence de la sphère unité $S = \{u \in \ell^1 \ , ||u||_1 = 1\}$ pour la topologie faible. On notera $\overline{S}$ cette adhérence. On va montrer que $\overline{S} = B$, où $B = \{u \in \ell^1, ||u||_1 \leq 1\}$ est la boule unité fermée de ℓ^1.
   (a) Soit $u \in B$. Montrer que tout voisinage de u contient une droite affine (donc de la forme $u + \mathbb{R}v$).
   (b) En déduire que $B \subset \overline{S}$.
   (c) Soit $u \in \ell^1 \setminus B$. Montrer qu'il existe $v \in \ell^\infty$ telle que $||v||_\infty \leq 1$ et $\phi(v)(u) > 1$.
   (d) Conclure.
5. $**$ Montrer que la topologie faible $\mathscr{T}$ n'est pas métrisable.
   Indication : le résultat suivant pourrait être utile : si $f, f_1, \dots, f_k$ sont des formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que $\bigcap_{i=1}^k \ker f_i \subset \ker f$, alors $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

III- Propriété de Schur pour ℓ^1

Dans cette partie, on va démontrer que la convergence faible de suites est équivalente à la convergence forte. Par linéarité, il suffit d'étudier la convergence en 0. Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de ℓ^1, on suppose que $u^n \rightharpoonup 0$ et on veut montrer que $u^n \to 0$.

1. On note $B^* = \{u \in \ell^\infty \ , ||u||_\infty \leq 1\}$. On définit une application $d : B^* \times B^* \to \mathbb{R}_+$ par
$$d(v,w) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{|v_i - w_i|}{2^i}$$
   (a) Montrer que d définit une distance sur B^*.
   (b) Soit $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B^*. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
      (i) $v^n \to 0$ pour d
      (ii) Pour tout $i \in \mathbb{N}, v_i^n \to 0$.
      (iii) Pour tout $u \in \ell^1, \phi(v^n)(u) \to 0$.
   (c) Montrer que (B^*, d) est un espace métrique compact.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \{v \in B^* \ , \forall m \geq n, |\phi(v)(u^m)| \leq \epsilon\}$. Déduire des questions précédentes qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n possède un voisinage de 0.
3. Conclure que $u^n \to 0$.

Problème 2 : Compactification de Stone–Čech

Let X be a *Tychonoff space,* this means it satisfies the separation axioms (T_1) and

$(T_{3\frac{1}{2}})$: for each $x \in X$ and a closed set $F \subset X$ s.t. $x \notin F$ there exists a continuous function $f : X \to [0,1]$ such that $x \in f^{-1}(\{0\})$ and $F \subset f^{-1}(\{1\})$.

0 - Recaps and basics

(i) Quote (T_1), (T_2), (T_4), and Urysohn's lemma ; argue that *normal Hausdorff spaces* (i.e., topological spaces satisfying (T_1) and (T_4)) are Tychonoff spaces.
(ii) Prove that *compact Hausdorff spaces* (='compacts en français' = compact topological spaces satisfying (T_2)) are normal Hausdorff (i.e., satisfy (T_4)).

Definition. A *Stone–Čech compactification* of a topological space X is a compact Hausdorff space βX and a continous mapping $\iota = \iota_X : X \to \beta X$ such that the following universal property holds :

> for each continuous mapping $f : X \to K$ of the space X to a compact Hausdorff space K there exists a unique continuous mapping $\beta f : \beta X \to K$ such that $\beta f \circ \iota_X = f$.

(iii) Prove that the space βX, if exists, is unique up to a homeomorphism.
(iv) Provided X is a Tychonoff space, prove that $\iota : X \to \iota(X)$ has to be a bijection and, moreover, a *homeomorphism* (the topology on $\iota(X)$ is induced from βX).
[*Hint :* For the latter, prove that $\iota(F)$ is closed in $\iota(X)$ if F is closed in X.]

Informally speaking, we aim to homeomorphically embed a Tychonoff space X into a (huge) compact Hausdorff space such that all continuous functions $f : X \to K$ admit(!) a unique(!) continuation onto this bigger space.

Our first goal is to prove that, for Tychonoff spaces X, the Stone–Çech continuation βX *exists* by giving an explicit construction based upon Tychonoff's theorem.

I - Construction

Denote $C_X := C(X; [0,1])$, the space of all continuous functions from X to $[0,1]$, and consider a *Tychonoff cube*

$$K(C_X) := [0,1]^{C_X} = \prod_{g \in C_X} [0,1] = \{\, \Phi : C_X \ni g \mapsto \Phi(g) \in [0,1] \,\}$$

(where one does *not* assume any property of Φ), equipped with the usual product topology. Recall that $K(C_X)$ is a compact space due to the Tychonoff theorem.

Now consider the mapping $I : X \to K(C_X)$, $x \mapsto I(x)$, where the *evaluation functional* $I(x) \in K(C_X)$ is defined as follows : $[I(x)](g) := g(x)$.
(i) Prove that $I : X \to I(X)$ is a bijection. Recall the definition of the topology on $I(X) \subset K(C_X)$ and prove that I is continuous.
(ii) Using the fact that X is a Tychonoff space, prove that $I : X \to I(X) \subset K(C_X)$ is a homeomorphism.

Let us *define* $\beta X := \overline{I(X)}^{K(C_X)}$, the closure of $I(X)$ in the topology of $K(C_X)$.

(iii) Argue that thus defined βX is a compact Hausdorff space.

II - Universal property.

Assume now that $f : X \to K$ is a continuous function, where K is a compact Hausdorff space. We aim to prove that there exists a unique continuous function $\beta f : \beta X \to K$ s.t. $f = \beta f \circ I$, where βX is constructed above.
(i) Argue that such a function $\beta f : \beta X \to K$, if exists, is unique.
(ii) Consider first the case $K = [0,1]$. Given a continuous function $f : X \to [0,1]$, prove that the function $\beta f : K(C_X) \to [0,1]$, $\Phi \mapsto \Phi(f)$, is continuous and that its restriction onto $\beta X \subset K(C_X)$ satisfies the required property $f = \beta f \circ I$.
(iii) Now consider the case when $K = K(A) = [0,1]^A$ is also a Tychonoff cube (we do *not* make any assumption on A here). Again, prove that each continuous function $f : X \to K(A)$, $x \mapsto f(x) : A \to [0,1]$, admits a *continuous(!)* extension $\beta f : K(C_X) \to K(A)$ defined as follows : $[(\beta f)(\Phi)](\alpha) = \Phi(f(\cdot)(\alpha))$.
(iv) Finally, argue that each compact Hausdorff space K can be homeomorphically embedded into a Tychonoff cube $K(A)$ with $A = C_K$ and conclude the proof.

III - ** Bonus : ultrafilters on $\mathbb{N}$.

It is easy to see that $\beta X \cong X$ if X is a finite set. Let us consider the simplest nontrivial example : $X = \mathbb{N}$ (equipped with the discrete topology). Recall that $\mathcal{U} \subset 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ is called a (proper) *ultra-filter* if

- for each $Y \subset \mathbb{N}$ either $Y \in \mathcal{U}$ or $\mathbb{N} \setminus Y \in \mathcal{U}$ (but not both) ;
- if $Y \in \mathcal{U}$, then $Y' \in \mathcal{U}$ for all larger sets $Y \subset Y' \subset \mathbb{N}$;
- if $Y_1, Y_2 \in \mathcal{U}$, then $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{U}$.

Prove that the Stone–Čech compactification $\beta\mathbb{N}$ of $\mathbb{N}$ is homeomorphic to the set of all proper ultra-filters on $\mathbb{N}$ equipped with the *Stone topology*, i.e., the topology generated by the base sets $\mathcal{W}_Y := \{\mathcal{U} : Y \in \mathcal{U}\}$, where Y runs over all subsets of $\mathbb{N}$.
The inclusion $\iota : \mathbb{N} \hookrightarrow \beta\mathbb{N}$ is defined as $n \mapsto \mathcal{U}_n := \{Y \subset \mathbb{N} : n \in Y\}$.

(i) Check that the Stone topology is correctly defined (i.e., that one can use the family $\{\mathcal{W}_Y\}_{Y \subset \mathbb{N}}$ as a base set to define a topology) and that it is Hausdorff.
(ii) Prove that thus defined topological space is compact. [*Hint :* This is equivalent to the following statement : given a family of sets Y_α such that no finite sub-family covers $\mathbb{N}$, one can define an ultrafilter on $\mathbb{N}$ that does not contain any of Y_α.]
(iii) *Ultra-limits :*

> let $\mathcal{U} \subset 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ be a proper ultra-filter and $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of elements of K. We say that $\mathcal{U}\text{-}\lim x_n = x$ if for each open neighborhood $V_x \subset K$, the following holds : $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_x\} \in \mathcal{U}$.

Prove that $\mathcal{U}\text{-}\lim x_n$ is unique provided that the topological space K is Hausdorff and that $\mathcal{U}\text{-}\lim x_n$ exists (for *all* sequences x_n) provided that K is compact.
(iv) Let K be a compact Hausdorff space, $f : \mathbb{N} \to K$, and $\mathcal{U}$ be a proper ultrafilter on $\mathbb{N}$. Define $(\beta f)(\mathcal{U}) := \mathcal{U}\text{-}\lim f(n)$ and prove that $\beta f : \beta\mathbb{N} \to K$ is a continuous extension of f from $\mathbb{N}$ to the topological space $\beta\mathbb{N}$ of all proper ultra-filters on $\mathbb{N}$.